

**Дочо Дочев, Мирослав Каракулаков,
Веселин Бошнаков, Радан Мирянов, Танка Милкова,
Йордан Петков, Велина Йорданова**

МАТЕМАТИКА
(задачи с приложение в икономиката)
Ръководство

Проф. д-р Дочо Дочев, гл. ас. Мирослав Каракулаков,
гл. ас. Веселин Бошнаков, гл. ас. Радан Мирянов,
гл. ас. Танка Милкова, гл. ас. Йордан Петков,
ас. Велина Йорданова

МАТЕМАТИКА

(задачи с приложение в икономиката)

Ръководство

(под редакцията на проф. д-р Дочо Дочев)

2012

Издателство “Наука и икономика”
Икономически университет – Варна

Тази книга или части от нея не могат да бъдат размножавани, разпространявани по електронен път и копирани без писменото разрешение на издателя.

© Дочо Тодоров Дочев, Мирослав Иванов Каракулаков, Веселин Янков Бошнаков, Радан Василев Мирянов, Танка Василева Милкова, Йордан Русанов Петков, Велина Георгиева Йорданова, автори, 2012.

© Издателство “Наука и икономика”, 2012.

ISBN 978-954-21-0610-4

Съдържание

Увод.....	12	
Глава първа ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ.....		13
1.1. Величина. Видове	13	
1.2. Множество. Операции с множества	14	
1.3. Числа	15	
1.4. Функция	22	
1.4.1. Определение на понятието „функция“	22	
1.4.2. Видове функции	27	
1.4.3. Основни елементарни функции	32	
Глава втора МАТЕМАТИЧЕСКА ИНДУКЦИЯ. КОМБИНАТОРИКА.....		37
2.1. Математическа индукция.....	37	
2.2. Комбинаторика.....	39	
2.2.1. Вариации без повторения	40	
2.2.2. Вариации с повторения.....	41	
2.2.3. Пермутации без повторения.....	42	
2.2.4. Пермутации с повторения	43	
2.2.5. Комбинации без повторения	44	
2.2.6. Комбинации с повторения.....	45	
2.3. Нютонов бином.....	47	
Глава трета ФИНАНСОВА МАТЕМАТИКА.....		49
3.1. Лихва.....	49	
3.1.1. Проста лихва.....	50	
3.1.2. Сложна лихва	57	
3.2. Дисконт (сконто).....	64	
3.2.1. Математически (точен) дисконт при проста лихвена ставка	65	
3.2.2. Банков (търговски) дисконт при проста ставка	66	
3.2.3. Еквивалентност на процентните ставки (вързка между лихвен и сконтов процент).....	67	

3.2.4. Математически дисконт при сложна лихвена ставка.....	68
3.2.5. Банков дисконт при сложна ставка.....	69
3.3. Аноитет.....	73
3.3.1. Същност на аноитета.....	73
3.3.2. Срочни периодични влогове.....	74
3.3.3. Дългосрочни заеми.....	77

Глава четвърта
ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА 85

4.1. Детерминанти.....	85
4.1.1. Детерминанти от втори ред.....	85
4.1.2. Детерминанти от трети ред.....	86
4.1.3. Детерминанти от n-ти ред.....	87
4.1.4. Свойства на детерминантите.....	89
4.2. Матрици.....	93
4.2.1. Определение за матрица. Видове матрици.....	93
4.2.2. Действия с матрици.....	95
4.2.3. Ранг на матрица.....	99
4.2.4. Обратна матрица.....	101
4.2.5. Матрични уравнения.....	105
4.3. Системи линейни уравнения.....	108

Глава пета
АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ 117

5.1. Декартова координатна система в равнината.....	117
5.2. Разстояние между две точки. Делене на отсечка в дадено отношение ...	118
5.3. Права линия в равнината.....	119
5.3.1. Уравнение на права в равнината.....	119
5.3.2. Ъгъл между две прави. Взаимно положение на две прави. Условия за успоредност и перпендикулярност на две прави.....	124
5.3.3. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права.....	127
5.4. Криви линии от втора степен.....	136
5.4.1. Окръжност.....	136
5.4.2. Елипса.....	137
5.3.3. Хипербола.....	139
5.3.4. Парабола.....	142
5.5. Приложения на аналитичната геометрия в икономиката.....	150

Глава шеста
ТЕОРИЯ НА ГРАНИЦИТЕ..... 153

6.1. Граница на числова редица	153
6.1.1. Числова редица	153
6.1.2. Ограничени, неограничени, безкрайно големи и безкрайно малки редици	153
6.1.3. Свойства на безкрайно малките редици	155
6.1.4. Сходящи редици. Граница на редица	155
6.1.5. Теореме за граници	157
6.1.6. Монотонни редици	158
6.1.7. Числото e	159
6.2. Числови редове	160
6.2.1. Свойства на числовите редове	162
6.2.2. Критерии за сходимост на числови редове	163
6.3. Граница на функция	168
6.3.1. Определения за граница на функция	168
6.3.2. Едностранны граници на функция	170
6.3.3. Граница на функция, когато аргументът клони към безкрайност	171
6.3.4. Аритметични операции с функции, имащи граница	171
6.3.5. Граница на сложна функция	172
6.4. Непрекъснатост на функция	174
6.4.1. Основни определения	174
6.4.2. Класификация на точките на прекъсване	176
6.4.3. Свойства на непрекъснатите функции в затворен интервал	178
6.4.4. Непрекъснатост на сложна и обратна функция	180
6.4.5. Понятие за равномерна непрекъснатост на функция	181

Глава седма
ПРОИЗВОДНА И ДИФЕРЕНЦИАЛ
НА ФУНКЦИЯ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА 185

7.1. Производна на функция на една променлива	185
7.1.1. Определение за производна на функция на една променлива	185
7.1.2. Геометричен смисъл на понятието „производна“	186
7.1.3. Диференцируемост и непрекъснатост	187
7.1.4. Производна на сложна функция	189
7.1.5. Производна на обратна функция	189

7.1.6. Логаритмично диференциране	189
7.1.7. Производни от по-висок ред	190
7.2. Диференциал на функция	195
7.2.1. Понятие за диференциал на функция	195
7.2.2. Диференциали от по-висок ред	198
7.3. Приложения на производната в икономиката	200
7.3.1. Гранични (пределни) величини в икономиката	200
7.3.2. Приложение на логаритмичната производна	201
7.3.3. Еластичност	202
7.3.4. Цена, доход, печалба и обем на производство	205
7.4. Основни теореми за диференцируеми функции	207
7.4.1. Теорема на Рол	207
7.4.2. Теорема на Лагранж	208
7.4.3. Теорема на Коши	209
7.4.4. Теорема (правило) на Лопитал	210
7.4.5. Формули на Тейлор и Маклорен	212
7.5. Изследване на функция	215
7.5.1. Растене и намаляване на функция	215
7.5.2. Екстремум (максимум и минимум) на функция на една променлива	216
7.5.3. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция	220
7.5.4. Темпове на изменение на функция	222
7.5.5. Асимптоти	224

Глава осма

ФУНКЦИЯ НА ДВЕ И ПОВЕЧЕ ПРОМЕНЛИВИ	232
8.1. Предварителни понятия	232
8.1.1. n -мерно евклидово пространство	232
8.1.2. Множества от точки в евклидовото пространство	233
8.1.3. Функция на две и повече променливи	235
8.1.4. Функции, описващи икономически понятия и явления	236
8.2. Граница на функция на две и повече променливи	240
8.3. Непрекъснатост на функция на две и повече променливи	242
8.4. Производни на функция на n променливи	244
8.4.1. Частни производни от първи ред	244
8.4.2. Икономически смисъл на частните производни	246

8.4.3.	Еластичност на функция на две и повече променливи	250
8.4.4.	Частни производни от по-висок ред	253
8.4.5.	Пълно нарастване на функция. Съществуване на частни производни и непрекъснатост на функция	256
8.4.6.	Производни на сложна функция. Пълна производна	257
8.4.7.	Производна на функция по посока и градиент	260
8.4.8.	Производна на неявна функция на една променлива	264
8.4.9.	Частни производни на неявна функция на n променливи	265
8.5.	Диференциал на функция на две и повече променливи	267
8.5.1.	Диференцируемост на функция на две променливи	267
8.5.2.	Пълен диференциал на функция на n променливи	268
8.5.3.	Повърхнини на ниво. Линии на ниво	270
8.5.4.	Функция на полезност. Замяна на ресурси	272
8.6.	Максимум и минимум на функция на две променливи	274
8.6.1.	Основни определения	274
8.6.2.	Необходими условия за екстремум	275
8.6.3.	Достатъчни условия за екстремум на функция на две променливи	276
8.6.4.	Функция на печалба – екстремум	278
8.6.5.	Условен екстремум	284
8.6.6.	Най-голяма и най-малка стойност на функция в дадена област ...	287
8.6.7.	Метод на най-малките квадрати	288

Глава девета

	НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ	293
9.1.	Примитивна функция и неопределен интеграл	293
9.2.	Методи за интегриране	296
9.2.1.	Непосредствено интегриране	296
9.2.2.	Интегриране по части	301
9.2.3.	Интегриране чрез субституция (смяна на променливата)	304
9.3.	Интегриране на рационални функции	309
9.3.1.	Интегриране на елементарни дроби	310
9.3.2.	Интегриране на рационални дроби	314
9.4.	Интегриране на ирационални функции	318
9.5.	Интегралите от трансцендентни функции	322

Глава десета	
ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ.....	
	325
10.1. Риманов интеграл	325
10.2. Суми на Дарбу	327
10.3. Свойства на определения интеграл	330
10.4. Връзка между определен и неопределен интеграл	333
10.5. Методи за интегриране при определен интеграл.....	334
10.6. Приложения на определения интеграл в геометрията.....	339
10.7. Несобствени интеграли	346
10.7.1. Несобствени интеграли с безкрайни граници (от I род).....	346
10.7.2. Интеграли от неограничени функции (от II род)	351
10.8. Приложения на определения интеграл в икономиката	355

Глава единадесета	
ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ.....	
	359
11.1. Основни понятия	359
11.2. Диференциални уравнения от първи ред с отделящи се променливи... 361	361
11.3. Еднородни (хомогенни) диференциални уравнения от първи ред..... 364	364
11.4. Линейни диференциални уравнения от първи ред	367
11.5. Бернулиеви диференциални уравнения от първи ред	369

Глава дванадесета	
ТЕОРИЯ НА ВЕРОЯТНОСТИТЕ.....	
	372
12.1. Случайни събития.....	372
12.2. Вероятност	375
12.2.1. Класически подход в теорията на вероятностите	375
12.2.2. Статистически подход в теорията на вероятностите	377
12.3. Условна вероятност. Независими събития	381
12.3.1. Условна вероятност	381
12.3.2. Вероятност на произведение от събития. Независими събития	382
12.3.3. Формула за пълна вероятност. Формула на Бейс.....	384
12.3.4. Формула на Бернули.....	386
12.4. Дискретни случайни величини.....	391
12.4.1. Аритметични действия с дискретни случайни величини.....	392
12.4.2. Математическо очакване на дискретни случайни величини.....	394

12.4.3. Дисперсия и стандартно отклонение на дискретни случайни величини	395
12.5. Закони на разпределение на дискретни случайни величини	398
12.5.1. Биномно разпределение	398
12.5.2. Поасоново разпределение	399
12.5.3. Геометрично разпределение	399
12.5.4. Хипергеометрично разпределение	400
12.6. Непрекъснати случайни величини	400
12.6.1. Функция на разпределение на вероятностите (интегрална функция)	400
12.6.2. Плътност (диференциална функция) на разпределение	401
12.6.3. Числови характеристики на непрекъснати случайни величини	402
12.7. Закони на разпределение на непрекъснати случайни величини	404
12.7.1. Равномерно разпределение	404
12.7.2. Показателно разпределение	405
12.7.3. Нормално разпределение	405
Литература	413