ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА I КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

ИКОНОМИЧЕСКИ СПЕЦИАЛНОСТИ

Включват се задачи от:
- линейна алгебра – матрици, детерминанти, системи линейни уравнения;
- аналитична геометрия – уравнения на права, уравнения на криви от втора степен;
- функция на една променлива - граница, непрекъснатост, диференциално смятане;
- функция на две променливи.

1. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 12x - 6$.

а) Да се докаже, че $f(x)$ има единствен локален екстремум.

б) Да се докаже, че $f(x)>0$ за всяко $x \geq 1$.

в) Да се докаже, че уравнението $f(x)=0$ има точно два различни реални корена.

2. x_1 и x_2 **са реални корени на уравнението** $x^2 - x + a = 0$ **(a – положителен реален параметър). Да се докаже, че** $\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

3. **Права пресича Ox в точка $A(a,0)$ и графиката на параболата $y = 3x^2$ в точки с абсциси b и c. Да се намери зависимостта между a, b и c.**

4. **Дадени са крива $\varepsilon : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, допирателна t към кривата ε в точка $A(0,2)$ и права $l : y = x - 2$. Ако t пресича l в точка B, l пресича Ox в точка C, да се намери лицето на четириъгълника $OBCA$.**

5. **Дадена е матрицата** $A = \begin{Vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$. **Да се намери** A^{2012}.

6. Да се реши уравнението $\begin{vmatrix} x+1 & x & -1 \\ 0 & x & -1 \\ x+1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$.

7. Да се реши системата в зависимост от стойностите на параметъра a:

$$\begin{vmatrix} x-ay+z=-a \\ x+a^2y-z=2 \\ 2x+ay-z=-2a \end{vmatrix}.$$

8. Да се намери каноничното уравнение на хипербола, която минава през точка $M\left(2,\sqrt{6}\right)$ **и единият й фокус е в точка** $F_2\left(-\sqrt{3},0\right)$.

9. Дадена е хипербола с уравнение $4x^2-9y^2=36$, **и точка А(-2; 6). Да се намерят: а) координатите на фокусите й; б) уравненията на асимптотите; в) уравненията на правите, които минават през точка А и са успоредни на асимптотите на хиперболата.**

10. Да се изследва и построи графиката на функцията $y=xe^x$.

11. Да се намерят локалните екстремуми на функцията:

а) $y=\dfrac{x}{\ln x}$; б) $y=x-\ln(1+x)$.

12. Да се докажат неравенствата: а) $y=e^x>1+x, x\neq 0$; **б)** $\ln(1+x)<x, x>0$.

13. Дадени са матриците $A=\begin{Vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{Vmatrix}$ $и$ $B=\begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ c & d \end{Vmatrix}$ $(a,b,c,d \in \mathrm{R})$, като $A.B=A^2$.

а) Да се изразят a, c и d чрез b.

б) Ако (b-1) е корен на уравнението $e^{-x}-x-1=0$, да се намерят матриците A и B.

14. Дадена е функцията $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$. Да се намерят:

а) интервалите на растене/намаляване и локалните й екстремуми;

б) асимптотите й.

15. Функцията $y=1-\sqrt[3]{x^2}$ приема стойност 0 и в двата края на интервала [-1,1], но не съществува нито една точка от този интервал, в която y'=0. Да се обясни противоречието с теоремата на Рол.

СПЕЦИАЛНОСТ ИНФОРМАТИКА

Включват се задачи от линейна алгебра и аналитична геометрия.

1. Да се пресметнат детерминантите:

а) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & -(n-1) & -n & n \end{vmatrix};$$

б) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2^n \end{vmatrix};$$ в) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

2. Точка се движи в равнината, като произведението от ъгловите коефициенти на правите, минаващи през тази точка и съответно точките $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ остава постоянна величина. Да се докаже, че движещата точка описва елеипса или хипербола.

3. Да се намери рангът на матрицата $\begin{Vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ a & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ a-2 & 0 & 5 \end{Vmatrix}$, $a \in R$.

Задачи 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,13 за икономически специалности.